Раздел 2. Тема 6. Занятие 1.

1° Градиент. Если $u(r) = u(x, y, z)$, $r = xi + yj + zk$, есть непрерывно дифференцируемое скалярное поле, то градиентом его называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

Градиент поля u в данной точке (x, y, z) направлен по нормали к поверхности уровня $u(x, y, z) = C$, проходящей через эту точку. Этот вектор для каждой точки поля по величине

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

и направлению дает наибольшую скорость изменения функции u.

Производная поля u в некотором направлении $l(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \langle \operatorname{grad} u, l \rangle = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2° Дивергенция поля и ротация поля.

Если $a(r) = a_x(x, y, z)\, i + a_y(x, y, z)\, j + a_z(x, y, z)\, k$ есть непрерывно дифференцируемое векторное поле, то скаляр

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется дивергенцией этого поля.

Вектор

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

называется ротацией векторного поля или вихрем поля.

3° Поток вектора через поверхность.

Если вектор $a(r)$ порождает векторное поле в области Ω, то потоком вектора через данную поверхность S, расположенную в Ω, в указанную сторону, характеризуемую единичным вектором нормали $n =$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, называется интеграл

$$\iint\limits_S a_n dS = \iint\limits_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) dS,$$

где $a_n = \langle a, n \rangle$ — нормальная проекция вектора. Формула Остроградского в векторной трактовке принимает вид

$$\oiint\limits_S a_n dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} a \, dxdydz,$$

где S есть поверхность, ограничивающая объем V, и n — единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

4^0 Циркуляция вектора.

Линейным интегралом от вектора $a(r)$, взятым по кривой C (работа поля), называется число

$$\int\limits_C a dr = \int\limits_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Если контур C замкнут, то линейный интеграл называется циркуляцией вектора a вдоль контура C.

В векторной форме формула Стокса имеет вид

$$\oint\limits_C a dr = \iint\limits_S (\operatorname{rot} a)_n dS,$$

где C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S, причем направление нормали n к поверхности S должно быть выбрано так, чтобы для наблюдателя, стоящего на поверхности S, головой по направлению нормали, обход контура C совершался против хода часовой стрелки.

5^0 Потенциальное поле.

Векторное поле $a(r)$, являющееся градиентом скаляра u:

$$\operatorname{grad} u = a,$$

называется потенциальным, а величина u называется потенциалом поля.

Если потенциал u – однозначная функция, то

$$\int\limits_{AB} a\,dr = u(B) - u(A) .$$

В этом случае циркуляция вектора a равна нулю.

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля a, заданного в односвязной области, является выполнение условия $\mathrm{rot}\,a = 0$, т.е. поле должно быть безвихревым.

Класс: №№ 4408 е), 4409, 4410, 4424 в), 4429, 4435, 4438, 4452.2.

Дома: №№ 4408 г), 4412, 4415.1, 4430, 4436, 4436.1, 4452.3, 4437.

№4437 Доказать формулы:

ⓐ $\operatorname{rot}(f(r)c)$ - ?

$$c=(c_x, c_y, c_z)=\mathrm{Const}$$

$$\operatorname{rot}(f(r)c)=\left\{\text{№4435 б) } \begin{matrix} u=f(r) \\ \bar{a}=\bar{c} \end{matrix}\right\}=f(r)\cancel{\operatorname{rot}\bar{c}}^{\,0}+[\operatorname{grad} f(r), c]=$$

$$=\left[f'(r)\frac{\bar{r}}{r}, \bar{c}\right]=\frac{f'(r)}{r}[\bar{r}, \bar{c}].$$

ⓑ $\operatorname{rot}[\bar{c}, f(r)\bar{r}]$ - ?

$[\bar{c}, f(r)\bar{r}]=f(r)[\bar{c}, \bar{r}] \Rightarrow$ по номеру 4435 б) $\begin{matrix} u=f(r) \\ \bar{a}=[\bar{c}, \bar{r}] \end{matrix}$

имеем:

$$\operatorname{rot}[\bar{c}, f(r)\bar{r}]=\operatorname{rot}(f(r)[\bar{c}, \bar{r}])=$$

$$=f(r)\operatorname{rot}[\bar{c}, \bar{r}]+[\operatorname{grad} f(r), [\bar{c}, \bar{r}]] ⊜$$

$$\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\frac{\bar{r}}{r}$$

$$⊜ f(r)\operatorname{rot}[\bar{c}, \bar{r}]+\frac{f'(r)}{r}[\bar{r}, [\bar{c}, \bar{r}]] ⊜$$

Используем формулу векторного анализа

$$[a, [b, c]]=b(a, c)-c(a, b) \text{ для } \forall a, b, c$$

$$[\bar{r}, [\bar{c}, \bar{r}]]=\bar{c}(\bar{r}, \bar{r})-\bar{r}(\bar{c}, \bar{r}).=\bar{c}r^2-\bar{r}(\bar{c}, \bar{r}).$$

$$[c, \bar{r}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ c_x & c_y & c_z \\ x & y & z \end{vmatrix}=(c_y z-c_z y)\bar{i}-(c_x z-c_z x)\bar{j}+(c_x y-c_y x)\bar{k}$$

Значит

$$\operatorname{rot}[\bar{c}, \bar{r}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \begin{vmatrix} c_y & c_z \\ y & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} c_x & c_z \\ x & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_x & c_y \\ x & y \end{vmatrix} \end{vmatrix}=i\cdot 2c_x+j\cdot 2c_y+k\cdot 2c_z=2\bar{c}$$

$$⊜ 2f(r)\bar{c}+\frac{f'(r)}{r}\left(\bar{c}\cdot r^2-\bar{r}(\bar{c}, \bar{r})\right).$$

4452.3 $\quad I=\int\limits_C (y+z)dx+(2+x)dy+(x+y)dz$,

где C – кратчайшая дуга большого круга сферы $x^2+y^2+z^2=25$, соединяющая точки $M(3,4,0)$ и $N(0,0,5)$

$$x=3\cos\varphi,\ y=4\cos\varphi,\ z=5\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\big((4\cos\varphi+5\sin\varphi)(-3\sin\varphi)+(2+3\cos\varphi)(-4\sin\varphi)+7\cos\varphi\cdot 5\cos\varphi\big)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-12\cos\varphi\sin\varphi-15\sin^2\varphi-8\sin\varphi-12\cos\varphi\sin\varphi+35\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-24\cos\varphi\sin\varphi-8\sin\varphi-15+50\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-12\sin 2\varphi-8\sin\varphi-15+25(1+\cos 2\varphi)\right)d\varphi=$$

$$=6\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+8\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+10\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{25}{2}\cancel{\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}^{\,0}=-12-8+5\pi\Rightarrow$$

$$\underline{I=5\pi-20.}$$